



EXAMEN D'ANALYSE FONCTIONNELLE  
CONCOURS D'ACCÈS À LA FORMATION  
DOCTORALE LMD

Exercice 1.

Soit  $K$  une partie de  $\mathbb{R}^n$ , compacte, convexe, symétrique par rapport à 0 et telle que 0 est un point intérieur. Soit  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$p(x) = \inf\{t > 0 / \frac{x}{t} \in K\}.$$

- 1) Montrer que  $p(x) = 0$  ssi  $x = 0$ .
- 2) Pour  $x$  non nul montrer que  $\frac{x}{p(x)} \in K$ .
- 3) Pour  $x$  non nul et  $t > 0$  montrer que  $p(tx) = tp(x)$ . En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}, p(tx) = |t|p(x)$ .
- 4) Montrer que si  $x$  et  $y$  sont non nuls  $\frac{x+y}{p(x)+p(y)} \in K$ .
- 5) Conclure.
- 6) Montrer que  $K$  est la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^n$  pour la norme  $p$ .

Exercice 2.

Soit  $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . Montrer que l'opérateur  $T_K : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  défini par

$$T_K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) dy$$

est bien défini et borné.

Déterminer  $T_K^*$  l'adjoint de  $T_K$ .

Exercice 3.

Soit  $E$  une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et  $f : E \rightarrow E$  une fonction vérifiant

$$\forall x, y \in E, (x \neq y) \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Montrer que  $f$  admet un unique point fixe.



Université de Sétif 1  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

Année scolaire 2013-2014

Octobre 2013 - Durée 1h30mn

Concours d'Accès en Doctorat LMD 2013-2014

Épreuve EDP

Exercice 1: (2pts)

Trouver la solution  $u(x, y)$  de l'équation aux dérivées partielles.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Exercice 2: (6pts)

Déterminer la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = 4$$

et la surface intégrale qui contient la courbe  $(C)$  d'équations

$$(C) : \begin{cases} y^2 = z \\ x = 0 \end{cases}$$

Problème: (12pts)

D'après la méthode de séparation des variables combinée avec les séries

de Fourier. Trouver la solution  $u(x, t)$  de l'équation

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \forall t > 0 \quad (1)$$

avec les conditions aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t), \quad \forall t > 0 \quad (2)$$

et avec la condition initiale

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$